Title	ある種の(非可換)コンパクト群上の F.-M. Riesz の定理について(群と等質空間の表現論)
Author(s)	山口, 博
Citation	数理解析研究所講究録 (1997), 1008: 46-64
Issue Date	1997-08
URL	http://hdl.handle.net/2433/61491
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1008巻 1997年 46-64

ある種の(非可換)コンパクト群上の F.-M. Riesz の定理について

城西大学・理 山口 博 (Hiroshi Yamaguchi)

ここでは，ある種の(非可換)コンパクト群上における F.-M. Riesz の定理に関連したことを述べてみる。

§1. 序

最初に，circle group $\mathbb{T}$ における通常の F.-M. Riesz の定理を述べる。

<u>定理1.1</u> (F.-M. Riesz).

$\mu \in M(\mathbb{T})$. $\hat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} e^{-int} d\mu(e^{it}) = 0$ for $n < 0$.

$\Longrightarrow$ $\mu \ll m_{\mathbb{T}}$. (但し，$m_{\mathbb{T}}$ は $\mathbb{T}$ の Haar measure). //

2次元 circle group $\mathbb{T}^2$ においても同様のことが成り立つ。

<u>定理1.2</u> (S. Bochner).

$\mu \in M(\mathbb{T}^2)$. $\hat{\mu}(n, m) = 0$ for $(n, m) \notin \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$.

$\Longrightarrow$ $\mu \ll m_{\mathbb{T}^2}$. //

定理1.2に関連して，次も成り立つ。

<u>定理1.2′</u>. $E=\{(n,m)\in\mathbb{Z}^2 : n\geqq 0,\ |m|\leqq n\}$とする。

$\mu\in M(\mathbb{T}^2)$. $\hat{\mu}(n,m)=0$ for $(n,m)\notin E$.

$\Longrightarrow$ $\mu\ll m_{\mathbb{T}^2}$. //

<u>注意1.1.</u> 定理1.1, 定理1.2 (1.2′) に対応したことが, $\mathbb{R}$及び$\mathbb{R}^2$でも成り立つ。又，実際には，定理1.2及び定理1.2′よりもう少し強いことが成り立つ (cf. [13, 8.2.5 Theorem]). //

<u>注意1.2.</u> 定理1.1よりもう少し強い次の結果が実際には成り立つ: $0\neq\mu\in M(\mathbb{T})$. $\hat{\mu}(n)=0$ for $n<0$.

$\Longrightarrow$ $|\mu|\ll m_{\mathbb{T}}$ かつ $m_{\mathbb{T}}\ll|\mu|$. //

§2. コンパクト可換群上のF.-M. Rieszの定理.

Helson-Lowdenslager ([7]) は定理1.1をordered dualを持つcompact abelian groupに拡張した。Gをcompact abelian groupとし，$\hat{G}$をGのdual groupとする。m_GはG上のHaar measureを表わすとする。$M(G)$をG上のbounded regular measuresの空間とする。$\mu\in M(G)$に対して，$\hat{\mu}$はμのFourier変換を表わすものとする。i.e., $\hat{\mu}(\gamma)=\int_G(-x,\gamma)\,d\mu(x)$ $(\gamma\in\hat{G})$.

$\mathrm{Trig}(G)$をG上のtrigonometric polynomialsの空間とする。

$E\subset\hat{G}$に対して，$M_E(G)=\{\mu\in M(G) : \hat{\mu}=0 \text{ on } E^c\}$,

$\mathrm{Trig}_E(G) = \{f \in \mathrm{Trig}(G) : \hat{f} = 0 \text{ on } E^c\}$ とおく。$\hat{G}$ の部分集合 E は，$M_E(G) \subset L^1(G)$ を満たすとき Riesz set と呼ばれる。

<u>定義 2.1</u>　$\hat{G}$ は次の (i), (ii) を満たす $\hat{G}$ の semigroup P が存在するとき，ordered であるという。

$$\text{(i)} \quad P \cup (-P) = \hat{G}, \qquad \text{(ii)} \quad P \cap (-P) = \{0\}. \quad //$$

このとき，$\gamma, w \in \hat{G}$ に対して，"$\gamma \geqq w \Longleftrightarrow \gamma - w \in P$" により，$\hat{G}$ に linear order が入る。

<u>定理 2.1.</u> (cf. [7], [13, 8.2.3 Theorem]).
G を ordered dual $\hat{G}$ を持つ compact abelian group とする。

$\mu \in M(G)$. $\quad \hat{\mu}(\gamma) = 0 \quad \text{for} \quad \gamma < 0.$

$$\Longrightarrow \quad \text{(i)} \quad \hat{\mu}_a(\gamma) = \hat{\mu}_s(\gamma) = 0 \quad \text{for} \quad \gamma < 0.$$

$$\text{(ii)} \quad \hat{\mu}_s(0) = 0.$$

但し，$\mu = \mu_a + \mu_s$ は μ の m_G に関する Lebesgue 分解。//

<u>注意 2.1</u>　定理 1.1 は定理 2.1 より得られる。
実際，$\mu \in M(\mathbb{T})$, $\hat{\mu}(n) = 0$ for ${}^\forall n < 0$ とする。すると，定理 2.1 より，$\hat{\mu}_s(n) = 0$ for ${}^\forall n \leqq 0$。従って，$(e^{-i\cdot}\mu_s)^\wedge(n) = \hat{\mu}_s(n+1) = 0$ for ${}^\forall n < 0$。故に，$(e^{-i\cdot}\mu_s)$ の singular part はそれ自身故，定理 2.1 より，$\hat{\mu}_s(1) = (e^{-i\cdot}\mu_s)^\wedge(0) = 0$。以下同様にして，"$\hat{\mu}_s(n) = 0$ for ${}^\forall n \in \mathbb{Z}$" が得られる。従って，$\mu_s = 0$。故に，$\mu = \mu_a \ll m_{\mathbb{T}}$。//

<u>定義 2.2.</u>　$0 < p < \infty$, $E \subset \hat{G}$ とする。

E : $\Lambda(p)$-set $\Longleftrightarrow$ $0 < {}^{\exists}q < p$, ${}^{\exists}C > 0$ s.t.

$$\|f\|_p \leqq C\|f\|_q \quad \text{for } {}^{\forall}f \in \mathrm{Trig}_E(G). \ /\!/$$

$G = \mathbb{T}$ のとき，$E = \{n_k \in \mathbb{N} : n_{k+1}/n_k > 3 \ (k = 1, 2, 3, \cdots)\}$ は $\hat{\mathbb{T}} \cong \mathbb{Z}$ における $\Lambda(p)$-set $({}^{\forall}p \geqq 1)$ の例になっている。

Pigno は定理 2.1 を次のように拡張した。

<u>定理 2.2</u> (cf. [11, Theorem 2]).

P を $\hat{G}$ に order を入れる semigroup とし，$E \subset \hat{G}$ を $\Lambda(1)$-set とする。$\mu \in M(G)$, $\hat{\mu}(\gamma) = 0$ for ${}^{\forall}\gamma \in (P \cup E)^c$.

$$\Longrightarrow \text{(i)} \quad \hat{\mu}_s(\gamma) = 0 \quad \text{for } \gamma < 0 \ (\text{i.e., } \gamma \notin P).$$

$$\text{(ii)} \quad \hat{\mu}_s(0) = 0. \quad /\!/$$

<u>注意 2.2.</u> (1) 定理 2.2 において，$E = \phi$ とした時が定理 2.1 である。

(2) $G = \mathbb{T}$ のとき，定理 2.2 より Rudin の結果 [12, Theorem 5.7] が得られる。 //

Pigno は次のようなもっと一般的な定理 2.1 の拡張も与えている。

<u>定理 2.2′</u> ([11, Theorem 2]).

P, E は定理 2.2 のとおりとし，$\mu \in M(G)$ とする。今，

$$(*) \left(\begin{array}{l} {}^{\forall}\varepsilon > 0, \ {}^{\exists}K_\varepsilon \subset \hat{G} : \text{finite set s.t.} \\ f(x) = \sum_\gamma c_\gamma (-x, \gamma) \in \mathrm{Trig}(G), \ \gamma \notin K_\varepsilon \cup P \cup E, \ \|f\|_\infty \leqq 1 \\ \qquad \Longrightarrow \ \left|\sum_\gamma c_\gamma \hat{\mu}(\gamma)\right| \leqq \varepsilon \end{array} \right.$$

が満たされるとすると，次が成り立つ。

(i) $\mathrm{supp}(\hat{\mu}_s) \subset P$.

(ii) $\hat{\mu}_s(0) = 0$. //

§3. ある種の変換群における F.-M. Riesz の定理.

Forelli ([6]) による実数 $\mathbb{R}$ が局所コンパクト Hausdorff 空間に作用する(位相)変換群における解析的測度に関する結果がある。ここでは compact abelian group が局所コンパクト Hausdorff 空間に作用する変換群における F.-M. Riesz の定理に関連した結果を述べる。

(G, X) を compact abelian group G が局所コンパクト Hausdorff 空間 X に作用する(位相)変換群とする。$M(X)$ を X 上の bounded regular measures の空間とする。$\lambda \in M(G)$, $\mu \in M(X)$ に対して，$\lambda * \mu \in M(X)$ を次により定義する。

$$\lambda * \mu(f) = \int_X \int_G f(g \cdot x)\, d\lambda(g)\, d\mu(x) \quad \text{for} \quad f \in C_0(X).$$

又，X 上の quasi-invariant (positive) Radon measure σ に対して，$N(\sigma) = \{\mu \in M(X) : \lambda * \mu \ll \sigma \text{ for } {}^\forall \lambda \in L^1(G)\}$ とおく。

<u>定義 3.1.</u> $\mu \in M(X)$ に対して，$J(\mu) = \{k \in L^1(G) : k * \mu = 0\}$ とおき，μ の spectrum $sp(\mu)$ を $\bigcap_{k \in J(\mu)} \hat{k}^{-1}(0)$ により定義する。//

定理 2.1 の (G, X) での対応した結果は次のようになる。

<u>定理3.1</u>([16, Theorem 2.1]).
P を $\hat{G}$ の semigroup で $P\cup(-P)=\hat{G}$ を満たすものとし，σ を X 上の quasi-invariant Radon measure とする。$\mu\in M(X)$ とし，$\mu=\mu_a+\mu_s$ を μ の σ に関する Lebesgue 分解とする。もし，$sp(\mu)\subset P$ ならば，

(i) $sp(\mu_a)$, $sp(\mu_s)\subset P$.

更に，$P\cap(-P)=\{0\}$ と $\pi(|\mu|)\ll\pi(\sigma)$ が満たされるなら

(ii) $sp(\mu_s)\subset P\setminus\{0\}$

も成り立つ。但し，$\pi: X\to X/G$ は canonical map. //

Locally compact group 上の bounded regular measure の絶対連続性は translation の連続性によって特徴付けることができる(cf. [8, (19.27), (20.4) Theorem])。(G, X) 上ではこのことに関連して次のことが成り立つ。

<u>定理3.2</u>([16, Theorem 2.3]).
$E\subset\hat{G}$ を Riesz set とする。$\mu\in M(X)$. もし，$sp(\mu)\subset E$ ならば，$\lim_{g\to 0}\|\mu-\delta_g*\mu\|=0$。但し，$\delta_g$ は $g\in G$ における point mass。 //

定理3.2 において，μ が与えられた quasi-invariant Radon measure に関して絶対連続になるためには更に条件が必要である。

<u>定理3.3</u>([17, Corollary 1.1]).
$E \subset \hat{G}$ を Riesz set とし，σ を X 上の quasi-invariant Radon measure とする。$\mu \in M(X)$. もし，$sp(\mu) \subset E$ かつ $\pi(|\mu|) \ll \pi(\sigma)$ ならば，$\mu \ll \sigma$。但し，$\pi : X \to X/G$ は canonical map。 //

<u>注意3.1</u>(cf. [17, Remark 1.2]).
定理3.3において，仮定"$\pi(|\mu|) \ll \pi(\sigma)$"は必要である。//
一方，Finet and Tardivel-Nachet は次の結果を得ている。

<u>定理3.4</u>([5, Theorem 4.10]).
E, σ は定理3.3のとおりとする。$\mu \in N(\sigma)$.
もし，$sp(\mu) \subset E$ ならば，$\mu \ll \sigma$。 //

<u>注意3.2</u>([18, Proposition 2.1]).
σ を X 上の quasi-invariant Radon measure とする。
$\mu \in M(X)$ に対して，次の (i), (ii) は同値である。

(i) $\mu \in N(\sigma)$.

(ii) $\pi(|\mu|) \ll \pi(\sigma)$. ($\pi : X \to X/G$ は canonical map)

従って，特にこのことから，定理3.3と定理3.4は同値であることがわかる。 //

§4. Compact group 上の F.-M. Riesz の定理について

ここでは Brummelhuis によって与えられた metrizable compact group 上の F.-M. Riesz の定理に関連した結果の拡張と定理2.2の compact group への拡張について述べる。尚，ここで述べる結果は[18]で得られたものである。

K を compact group とし，Σ_K を K の dual object とする。M(K) を K 上の bounded regular measures の空間とし，m_K を K の Haar measure とする。$0<p<\infty$ に対して，$L^p(K)$ は通常の空間とする。$\sigma \in \Sigma_K$ に対して，$U^{(\sigma)}$ を σ に属し，H_σ を表現空間として持つ K の continuous irreducible unitary representation とする。$\mathcal{T}(K)$ を K 上の trigonometric polynomials の空間とする (i.e., $\mathcal{T}(K)$ は関数 $x \longrightarrow \langle U_x^{(\sigma)}\xi, \eta\rangle$ $(\sigma \in \Sigma_K;\ \xi, \eta \in H_\sigma)$ の一次結合の全体)。$Z(K)$ を K の center とし，$G \subset Z(K)$ を K の closed subgroup とする (このとき，G は compact abelian group になる)。すると，Schur's lemma により，写像 $\gamma : \Sigma_K \to \hat{G}$ で次の (4.1) を満たすものが存在する。

$$(4.1) \qquad U_x^{(\sigma)} = (x, \gamma(\sigma))\, I \qquad (x \in G,\ \sigma \in \Sigma_K).$$

但し，$U^{(\sigma)} \in \sigma$ で I は $U^{(\sigma)}$ の表現空間 H_σ 上の identity operator。
$N(m_K) = \{\mu \in M(K) : \lambda * \mu \ll m_K \text{ for } {}^\forall \lambda \in L^1(K)\}$ とおく。
$\mu \in M(K)$ に対して，$\hat{\mu}$ を μ の Fourier 変換とする。i.e., $\sigma \in \Sigma_K$; $\xi, \eta \in H_\sigma$ に対して，

$$\langle \hat{\mu}(\sigma)\xi, \eta\rangle = \int_K \langle \overline{U}_x^{(\sigma)}\xi, \eta\rangle \, d\mu(x).$$

但し，$\overline{U}_x^{(\sigma)} = D_\sigma U_x^{(\sigma)} D_\sigma$ で，D_σ は conjugation on H_σ。

そして，$\mathrm{spec}(\mu) = \{\sigma \in \Sigma_K : \hat{\mu}(\sigma) \neq 0\}$ とおく。又，$E \subset \Sigma_K$ に対して，$M_E(K)$，$\mathfrak{T}_E(K)$ を次のように定義する。

$$M_E(K) = \{\mu \in M(K) : \mathrm{spec}(\mu) \subset E\};$$

$$\mathfrak{T}_E(K) = \{f \in \mathfrak{T}(K) ; \mathrm{spec}(f) \subset E\}.$$

変換群 (G, K) が自然に得られるが，$\mu \in M(K)$ の変換群 (G, K) における spectrum を $sp(\mu)$ で表わすことにする。すると次が成り立つ。

<u>命題 4.1.</u>　$E \subset \hat{G}$ とする。$\mu \in M(K)$ に対して，次の (i), (ii) は同値である。

(i) $\mathrm{spec}(\mu) \subset \gamma^{-1}(E)$.

(ii) $sp(\mu) \subset E$. //

<u>定義 4.1.</u> (i) $E \subset \Sigma_K$: Riesz set $\iff$ $M_E(K) \subset L^1(K)$.

(ii) $0 < p < \infty$.

$$E \subset \Sigma_K : \Lambda(p)\text{-set} \iff 0 < {}^\exists q < p,\ {}^\exists C > 0 \ \text{ s.t.}$$

$$\|f\|_p \leq C\|f\|_q \quad \text{for } {}^\forall f \in \mathfrak{T}_E(K). \ //$$

<u>注意 4.1.</u>　Σ_K の有限集合，$\Lambda(1)$-set は Riesz set である。//

Brummelhuis は Shapiro ([14]) の手法を使って，metrizable な (非可換) compact group に対する F.-M. Riesz の定理に関連した結果として次の結果を得た。

定理4.1([1, Theorem 3.2]).
Kはmetrizable compact groupとし，$Z(K)$はcircle group $\mathbb{T}$をclosed subgroupとして含むとする。そして，$\Delta \subset \Sigma_K$は次の(i),(ii)を満たすとする。

(i) $^\forall m \in \mathbb{Z}\ (\cong \hat{\mathbb{T}})$, $\{\sigma \in \Delta : \gamma(\sigma) = m\}$は有限集合.

(ii) $\{\gamma(\sigma) : \sigma \in \Delta\}$は$\mathbb{Z}$において下に有界.

このとき，$\mu \in M(K)$, $\mathrm{spec}(\mu) \subset \Delta \Longrightarrow \mu \ll m_K$. //

注意4.2. [1, 3.4 Remark]で，定理4.1の条件(i)は，もっと弱い次の条件(i)′でおきかえられることが指摘されている: (i)′ $^\forall m \in \mathbb{Z}$, $\{\sigma \in \Delta : \gamma(\sigma) = m\}$は$\Lambda(1)$-set. //

注意4.3. $K = \mathbb{T}^2$, $\mathbb{T} = \mathbb{T} \oplus \{0\}$のとき，$\gamma : \Sigma_K \cong \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$はprojection $\gamma(n, m) = n$になる。従って，定理4.1は定理1.2′に対応した結果と考えることができる。

定理3.4を使うと定理4.1は次のように拡張できる。

定理4.2. Kをcompact groupとし，$Z(K)$はcompact abelian group Gをclosed subgroupとして含むとする。$\Delta \subset \Sigma_K$は次の条件(i),(ii)を満たすとする。

(i) $^\forall \omega \in \hat{G}$, $\{\sigma \in \Delta : \gamma(\sigma) = \omega\}$は$\Sigma_K$におけるRiesz set.

(ii) $\{\gamma(\sigma) : \sigma \in \Delta\}$は$\hat{G}$のRiesz set.

このとき，$\mu \in M(K)$, $\mathrm{spec}(\mu) \subset \Delta \Longrightarrow \mu \ll m_K$. //

注意4.4. Σ_K の $\Lambda(1)$-set は Riesz set であるから, 定理4.2 における条件(i)は次の条件(i)$'$でおきかえても良い。

(i)$'$ $\forall \omega \in \hat{G}$, $\{\sigma \in \Delta : \gamma(\sigma) = \omega\}$ は Σ_K における $\Lambda(1)$-set。//

定理4.2 の証明.

$\gamma_0 \in \hat{G}$ とする。$\sigma \in \Sigma_K$, $\xi, \eta \in H_\sigma$ に対して,

$$\langle (\gamma_0 m_G)^\wedge(\sigma)\xi, \eta \rangle = \begin{cases} \langle \xi, \eta \rangle & \text{if } \gamma(\sigma) = \gamma_0 \\ 0 & \text{if } \gamma(\sigma) \neq \gamma_0 \end{cases}$$

従って, $\mathrm{spec}(\mu) \subset \Delta$ 故,

(1) $\{\sigma \in \Sigma_K : \{(\gamma_0 m_G) * \mu\}^\wedge(\sigma) \neq 0\} \subset \{\sigma \in \Delta ; \gamma(\sigma) = \gamma_0\}$.

従って, 仮定(i)より,

$$(\gamma_0 m_G) * \mu \ll m_K \quad \text{for } \forall \gamma_0 \in \hat{G}.$$

故に,

(2) $(h m_G) * \mu \ll m_K \quad \text{for } \forall h \in \mathrm{Trig}(G)$.

Trig(G) は $L^1(G)$ で dense であるから, (2) より

$$(f m_G) * \mu \ll m_K \quad \text{for } \forall f \in L^1(G).$$

従って,

(3) $\mu \in N(m_K)$.

一方, $\mathrm{spec}(\mu) \subset \Delta$ 故, [17, Lemma 3.1] より

(4) $\mathrm{sp}(\mu) \subset \{\gamma(\sigma) : \sigma \in \Delta\}$。

仮定(ii)より, $\{\gamma(\sigma) : \sigma \in \Delta\}$ は $\hat{G}$ における Riesz set。従って, (3), (4) と定理3.4 より, $\mu \ll m_K$ が得られる。 //

定理4.2より，次の系が得られる。

系4.1. $K = G \oplus H$ とする。但し，G は compact abelian group，H は compact group．E を $\hat{G}$ の Riesz set，F を Σ_H の Riesz set とすると，$E \times F$ は Σ_K $(\cong \hat{G} \times \Sigma_H)$ の Riesz set である。//

系4.1を証明するために，次の補題が必要である。

補題4.1. G, H, K は系4.1のとおりとする。

$\alpha \in \hat{G}$; $F \subset \Sigma_H$: Riesz set $\Longrightarrow$ $\{\alpha\} \times F$ は Σ_K の Riesz set.//

系4.1の証明.

$\Sigma_K \cong \hat{G} \times \Sigma_H$ で，$\gamma(\omega, \sigma_H) = \omega$ for $(\omega, \sigma_H) \in \Sigma_K$ となることに注意しておく。$\Delta = E \times F$ とおく。$\alpha \in \hat{G}$ に対して，

$$\{\sigma = (\omega, \sigma_H) \in \Delta : \gamma(\sigma) = \alpha\}$$

$$= \begin{cases} \{\alpha\} \times F & \text{if } \alpha \in E \\ \phi & \text{if } \alpha \notin E. \end{cases}$$

従って，補題4.1より，$\{\sigma = (\omega, \sigma_H) \in \Delta : \gamma(\sigma) = \alpha\}$ は Σ_K における Riesz set。又，$\{\gamma(\sigma) : \sigma \in \Delta\} = E$ は $\hat{G}$ における Riesz set。従って，定理4.2より，$\Delta = E \times F$ は Σ_K における Riesz set である。//

定理2.2の compact group K への拡張は次のようになる。

定理4.3 K を compact group とし，$Z(K)$ は compact abelian group G を closed subgroup として含むとする。$\hat{G}$ は ordered で，

P を $\hat{G}$ に order を入れる semigroup とする。$E \subset \Sigma_K$ を $\Lambda(1)$-set とする。$\mu \in M(K)$. $\mathrm{spec}(\mu) \subset E \cup \gamma^{-1}(P)$.

$\Longrightarrow$ (i) $\mathrm{spec}(\mu_s) \subset \gamma^{-1}(P)$.

(ii) もし,更に $\mu \in N(m_K)$ ならば, $\hat{\mu}_s = 0$ on $\gamma^{-1}(0)$.

但し, $\mu = \mu_a + \mu_s$ は μ の m_K に関する Lebesgue 分解. //

<u>定理 4.3 の証明の概略</u>

最初に, $\lambda \in M(K)$, $Y \subset \hat{G}$ に対して, "$\mathrm{spec}(\lambda) \subset \gamma^{-1}(Y)$" と "$\mathrm{sp}(\lambda) \subset Y$" が同値であることに注意する。$\{F_\alpha\} \subset \mathcal{I}^+(K)$ を $\|F_\alpha\|_1 = 1$ なる $L^1(K)$ に対する left approximate identity とする。但し, $\mathcal{I}^+(K) = \{f \in \mathcal{I}(K) : f \geqq 0\}$。$\omega \in \hat{G}$ に対して, $\Pi_\omega : \mathcal{I}(K) \longrightarrow \mathcal{I}(K)$ を

$$\Pi_\omega(f)(k) = \int_G f_k(x)(-x, \omega)\, dm_G(x)$$

により定義する。但し, $f_k(x) = f(xk)$。そして, $\Phi^- : \mathcal{I}(K) \to \mathcal{I}(K)$ を

$$\Phi^-(f)(k) = \sum_{\omega < 0} \Pi_\omega(f)(k)$$

により定義する。すると, $^\exists C > 0$ s.t.

$$\|\Phi^-(F_\alpha * \mu)\|_p \leqq C\|\mu\|. \qquad (^\forall \alpha)$$

E は $\Lambda(1)$-set で, $\Phi^-(F_\alpha * \mu) \in \mathcal{I}_{E \setminus \gamma^{-1}(P)}(K)$ 故, $^\exists A > 0$ s.t.

$$\|\Phi^-(F_\alpha * \mu)\|_1 \leqq A\|\Phi^-(F_\alpha * \mu)\|_p \leqq AC\|\mu\|. \quad (^\forall \alpha)$$

故に, $\{\Phi^-(F_\alpha * \mu)\}$ は $M(K)$ において有界。従って, $^\exists \nu \in M(K)$, $^\exists\{\Phi^-(F_\beta * \mu)\}$: subnet of $\{\Phi^-(F_\alpha * \mu)\}$ s.t. $\Phi^-(F_\beta * \mu) \to \nu$ in w^*.

すると，$\Phi^{-}(F_\beta * \mu) \in \mathfrak{I}_{E\setminus\gamma^{-1}(P)}(K)$ 故，

(1) $\quad \mathrm{spec}(\nu) \subset E\setminus\gamma^{-1}(P)$.

一方，

(2) $\quad \hat{\mu}(\sigma) = \hat{\nu}(\sigma) \quad \text{for } {}^{\forall}\sigma \in E\setminus\gamma^{-1}(P)$

が成り立つことがわかる。すると，$\mathrm{spec}(\mu) \subset E \cup \gamma^{-1}(P)$ 故

$$\mathrm{spec}(\mu - \nu) \subset \gamma^{-1}(P).$$

従って，

(3) $\quad \mathrm{sp}(\mu - \nu) \subset P$.

故に，定理3.1(i)より，$\mathrm{sp}((\mu-\nu)_s) \subset P$. ところで，$E$ は $\Lambda(1)$-set 故，Riesz set。故に，(1)より $\nu \in L^1(K)$。従って，$(\mu-\nu)_s = \mu_s$ 故，$\mathrm{sp}(\mu_s) \subset P$。これより，(i)が得られる。次に，更に $\mu \in N(m_K)$ とする。$\nu \ll m_K$ 故，$\mu - \nu \in N(m_K)$. すると，注意3.2より，$\pi_G(|\mu-\nu|) \ll \pi_G(m_K)$。但し，$\pi_G : K \to K/G$ は canonical map。すると，(3)と定理3.1(ii)より，

$$\mathrm{sp}(\mu_s) = \mathrm{sp}((\mu-\nu)_s) \subset P\setminus\{0\}.$$

故に，$\mathrm{spec}(\mu_s) \subset \gamma^{-1}(P\setminus\{0\})$。従って，(ii)も得られる。//

<u>注意4.5</u>　定理4.3の条件(ii) $\mu \in N(m_K)$ は必要である。$K = \mathbb{T}\oplus\mathbb{T}$，$G = \mathbb{T}\oplus\{0\}$ とする。このとき，$\gamma : \Sigma_K \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\oplus\{0\}$ は $\gamma(n,m) = n$ とする。又，

$$N(m_K) = \{\mu \in M(\mathbb{T}^2) : (f\times\delta_0)*\mu \ll m_{\mathbb{T}^2} \ \text{for } {}^{\forall}f \in L^1(\mathbb{T})\}$$

とする。$\hat{G} \cong \mathbb{Z}$ に order を入れる semigroup を $\mathbb{Z}^+$ とし，

$\mu = m_{\mathbb{T}} \times \delta_0$ とおく。すると，$\mu = \mu_s$ で，

(i) $\hat{\mu}(n, m) = 0$ for ${}^\forall(n, m) \in \gamma^{-1}(\mathbb{Z}^+)^c$.

(ii) $\hat{\mu}_s(0, n) = \hat{\mu}(0, n) = 1$ for ${}^\forall n \in \mathbb{Z}$. //

定理2.2′に対応した結果は次のようになる。

定理4.3′ K, G, P は定理4.3のとおりとする。$E \subset Z_K$ を$\Lambda(1)$-setとし，$\mu \in M(K)$ とする。今，

$$(**)\left(\begin{array}{l} {}^\forall\varepsilon > 0,\ {}^\exists F_\varepsilon \subset Z_K\ ;\ \text{finite set} \quad \text{s.t.} \\ P(k) \in \mathcal{I}_{(F_\varepsilon \cup E \cup \gamma^{-1}(P))^c}(K),\ \|P\|_\infty \leqq 1 \\ \quad \Longrightarrow \left|\int_K P(k^{-1})\, d\mu(k)\right| \leqq \varepsilon \end{array}\right.$$

が満たされるとすると，次が成り立つ。

(i) $\mathrm{spec}(\mu_s) \subset \gamma^{-1}(P)$.

(ii) もし，$\mu \in N(m_K)$ なら，$\hat{\mu}_s = 0$ on $\gamma^{-1}(0)$. //

例4.1. $U(2) = \{A \in M(2) : A^*A = AA^* = E\}$ (但し, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$),

$SU(2) = \left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\right\}$.

$\rho : \mathbb{T} \times SU(2) \longrightarrow U(2)$ を $\rho(\alpha, u) = \alpha u$ なる写像とする。すると，ρ は onto, continuous homomorphism で，ρ の kernel は $\{(1, E), (-1, -E)\}$ となる。明らかに，

$$\mathbb{T} \cong \{e^{i\theta}E : e^{i\theta} \in \mathbb{T}\} \subset Z(U(2)).$$

$\widehat{SU(2)}$ を $SU(2)$ の dual object とすると，$\widehat{SU(2)} = \{T^{(l)} : l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots\}$ となる。但し，$T^{(l)}$ は [9, (29.13)] のもの。すると，$U(2)$ の dual object $\widehat{U(2)}$ は次のようになる (cf. [9, (29.48)]).

$$\widehat{U(2)} = \{\tau_{n,\ell} : n \in \mathbb{Z},\ \ell \in \{0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 0, \cdots\},\ n+2\ell \text{ は偶整数}\}.$$

但し，$\tau_{n,\ell}(V) = e^{in\theta}\, T_u^{(\ell)}$ for $V = e^{i\theta}u \in U(2)$ $(u \in SU(2))$.

又，$\gamma : \widehat{U(2)} \longrightarrow \widehat{\mathbb{T}} \cong \mathbb{Z}$ を (4.1) を満たす写像とすると，

$$\gamma(n, \ell) = n$$

となる。

(i)　$\alpha > 0$ に対して，$\Delta_\alpha = \{\tau_{n,\ell} \in \widehat{U(2)} : \ell < \alpha n\}$ とおく。すると，定理 4.1（又は 定理 4.2）により，Δ_α は $\widehat{U(2)}$ の Riesz set である。

(ii)　$\Delta = \{\tau_{n,\ell} \in \widehat{U(2)} : n \geqq 0\}$ とおく。$\mu \in M(U(2))$, $\mathrm{spec}(\mu) \subset \Delta$ とする。すると，定理 4.3 より，$\mathrm{spec}(\mu_a)$, $\mathrm{spec}(\mu_s) \subset \Delta$ となる。

(iii)　m を $U(2)$ の Haar measure とし，Δ は (ii) の集合とする。$\mu \in N(m)$, $\mathrm{spec}(\mu) \subset \Delta$ $(= \gamma^{-1}(\mathbb{Z}^+))$ とする。すると，$\mathrm{sp}(\mu) \subset \mathbb{Z}^+$. $\mathbb{Z}^+$ は $\mathbb{Z}$ の Riesz set 故，定理 3.4 より，$\mu \ll m$.

(iv)　(ii) における集合 Δ は $\widehat{U(2)}$ における Riesz set ではない。$\nu \in M(\mathbb{T} \times SU(2))$ を $\nu = m_{\mathbb{T}} \times \delta_E$ とおく。但し，δ_E は unit matrix E における point mass。そこで，$\mu \in M(U(2))$ を $\mu = \rho(\nu)$ により定義する。すると，$\mathrm{spec}(\mu) \subset \Delta$ であるが $\mu \perp m$ である。 //

参考文献

[1] R.G.M. Brummelhuis, An F. and M. Riesz theorem for bounded symmetric domains, Ann. Inst. Fourier 37(2) (1987), 135–150.

[2] R.G.M. Brummelhuis, A note on Riesz sets and lacunary sets, J. Austral. Math. Soc. 48 (1990), 57–65.

[3] K. DeLeeuw and I. Glicksberg, Quasi-invariance and analyticity of measures on compact groups, Acta Math. 109 (1963), 179–205.

[4] C. Finet, Lacunary sets for groups and hypergroups, J. Austral. Math. Soc. 54 (1993), 39–60.

[5] C. Finet and V. Tardivel-Nachef, Lacunary sets on transformation groups, Hokkaido Math. J. 23 (1994), 1–19.

[6] F. Forelli, Analytic and quasi-invariant measures, Acta Math. 118 (1967), 33–57.

[7] H. Helson and D. Lowdenslager, Prediction theory and Fourier series in several variables, Acta Math. 99 (1958), 165–202.

[8] E. Hewitt and K.A. Ross, Abstract Harmonic Analysis, Vol. I, New York–Heidelberg–Berlin, Springer-Verlag, 1963.

[9] E. Hewitt and K. A. Ross, Abstract Harmonic Analysis, Vol. II, New York – Heidelberg – Berlin, Springer-Verlag, 1970.

[10] T.-S. Liu, A. van Rooij and J.-K. Wang, Transformation groups and absolutely continuous measures II, Indag. Math. 32 (1970), 57 – 61.

[11] L. Pigno, A variant of the F. and M. Riesz theorem, J. London Math. Soc. 9 (1974), 368 – 370.

[12] W. Rudin, Trigonometric series with gaps, J. Math. Mech. 9 (1960), 203 – 227.

[13] W. Rudin, Fourier Analysis on Groups, Interscience, New York, 1962.

[14] J. H. Shapiro, Subspaces of $L^p(G)$ spanned by characters, $0 < p < 1$, Israel J. Math. 29 (1978), 248 – 264.

[15] H. Yamaguchi, The F. and M. Riesz theorem on certain transformation groups, Hokkaido Math. J. 17 (1988), 289 – 332.

[16] H. Yamaguchi, The F. and M. Riesz theorem on certain transformation groups, Hokkaido Math. J. 19 (1990), 345 – 359.

[17] H. Yamaguchi, Absolute continuity of measures on compact transformation groups, Hokkaido Math. J. 22 (1993), 25–33.

[18] H. Yamaguchi, An F. and M. Riesz theorem on compact groups, Transactions of a German-Japanese Symposium "Infinite Dimensional Harmonic Analysis" held in Tübingen, pp. 249–273, Verlag D. + M. Gräbner, Bamberg, 1996.